

Thời gian làm bài : 120 phút (không kể thời gian giao đề)

**Câu 1.** (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}$ .

b) Cho  $4a^2 + b^2 = 5ab$  và  $2a > b > 0$ . Tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{ab}{4a^2 - b^2}.$$

**Câu 2.** (4,0 điểm)

a) Cho  $a, b, c$  là ba số khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

b) Giải phương trình sau:  $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$ .

**Câu 3.** (3,0 điểm)

Cho hai số không âm  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 = a + b$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$ .

**Câu 4.** (5,0 điểm)

Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết  $CD = 2AB = 2AD$  và  $BC = a$ .

a) Tính diện tích hình thang ABCD theo  $a$ .

b) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Chứng minh  $\widehat{HDI} = 45^\circ$ .

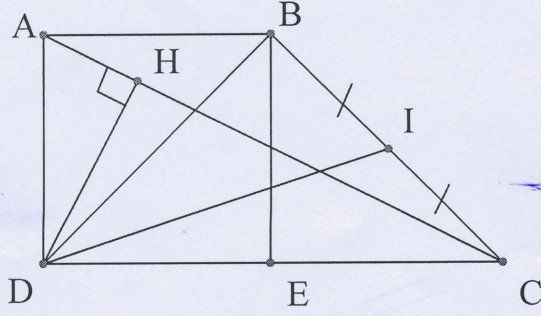
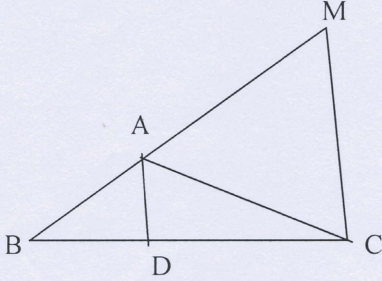
**Câu 5.** (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là  $l_a, l_b, l_c$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .

===== HẾT =====

### HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN 9

Câu	Nội dung	Điểm
<b>1</b> <b>(4,0đ)</b>	a) Biến đổi $A = \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}} = \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}}}$ $= \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10(2 + \sqrt{3})}} = \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}}$ $= \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{(5 - \sqrt{3})^2}} = \sqrt{5\sqrt{3} + 25 - 5\sqrt{3}} = 5$	0,5đ  0,5đ  1,0đ
	b) Ta có $4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow 4a^2 - 5ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (4a - b)(a - b) = 0$ (1) Do $2a > b > 0 \Rightarrow 4a > b \Rightarrow 4a - b > 0$ Nên từ (1) suy ra $a - b = 0 \Rightarrow a = b$ Vậy $B = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$	0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ
	a) Ta có: $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a}$ (1) $\frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{(b-a)-(b-c)}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}$ (2) $\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}$ (3)	0,5đ 0,5đ 0,5đ
	Cộng (1), (2) và (3) về theo về ta được: $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$	0,5đ
<b>2</b> <b>(4,0đ)</b>	+ Nếu $x \geq 2$ , phương trình đã cho trở thành $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = 4$ $\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 5) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \sqrt{5} \text{ (tm)} \\ x = -\sqrt{5} \text{ (loại)} \end{cases}$	0,5đ  0,5đ
	+ Nếu $x < 2$ , phương trình đã cho trở thành $(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = -4$ $\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = -4 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$ vô nghiệm	0,5đ
	KL: Phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{5}$ .	0,5đ

<p>3 (3,0đ)</p>	<p>Ta có <math>a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Rightarrow a + b \leq 2</math></p> <p>Chứng minh được với hai số dương <math>x, y</math> thì <math>\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}</math> và dấu “=” xảy ra khi <math>x = y</math></p> <p>Do đó <math>S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{b+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) \leq 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \leq 1</math></p> <p>Kết luận: GTLN của S là 1, đạt được khi <math>a = b = 1</math></p>	<p>0,5đ 1,0đ 1,0đ 0,5đ</p>
<p>4 (5,0đ)</p>		<p>0,5đ</p>
<p>a) Gọi E là trung điểm của CD, chỉ ra ABED là hình vuông và BEC là tam giác vuông cân.</p>	<p>Từ đó suy ra <math>AB = AD = BE = \frac{a\sqrt{2}}{2}; DC = a\sqrt{2}</math>.</p> <p>+ Diện tích của hình thang ABCD là <math>S = \frac{(AB+CD) \cdot AD}{2} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{6a^2}{4}</math></p>	<p>0,5đ 0,5đ 1,0đ</p>
<p>b) Lí luận <math>\widehat{ADH} = \widehat{ACD}</math> (1) (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng vuông góc) Lí luận tam giác IBD vuông cân tại B Xét hai tam giác ADC và IBD có</p>	<p><math>\widehat{ADC} = \widehat{DBI} = 90^\circ</math> và <math>\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BD} = \frac{1}{2}</math>, do đó hai tam giác ADC và IBD đồng dạng. Suy ra <math>\widehat{ACD} = \widehat{BDI}</math> (2)</p> <p>+ Từ (1) và (2), suy ra <math>\widehat{ADH} = \widehat{BDI}</math></p> <p>+ Mà <math>\widehat{ADH} + \widehat{BDH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BDI} + \widehat{BDH} = 45^\circ</math> hay <math>\widehat{HDI} = 45^\circ</math></p>	<p>0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ</p>
<p>5 (4,0đ)</p>	 <p>Gọi AD là đường phân giác trong góc A, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại M.</p> <p>Ta có <math>\widehat{BAD} = \widehat{AMC}</math> (hai góc ở vị trí đồng vị) <math>\widehat{DAC} = \widehat{ACM}</math> (hai góc ở vị trí so le trong)</p>	<p>0,5đ</p>

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{ACM}$ hay tam giác ACM cân tại A, suy ra $AM = AC = b$	1,0đ
Do $AD \parallel CM$ nên $\frac{AD}{CM} = \frac{BA}{BM} = \frac{c}{b+c}$	0,5đ
Mà $CM < AM + AC = 2b \Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{AD}{CM} > \frac{AD}{2b} \Rightarrow \frac{1}{AD} > \frac{b+c}{2bc} \Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$	1,0đ
Tương tự ta có $\frac{1}{l_b} > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$ (2); $\frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ (3)	0,5đ
Cộng (1), (2), (3) theo vế, ta có đpcm	0,5đ

Lưu ý: Học sinh có thể giải theo cách khác mà đúng thì vẫn cho theo thang điểm trên

.....**HẾT**.....