

Thời gian làm bài : 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $A = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

b) Cho $x = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$. Hãy tính $S = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5}$.

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Tìm các giá trị của x để $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$ có giá trị nguyên.

b) Giải phương trình

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} + \frac{x^2+x-4}{x^4+x^2+1} = 0.$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Chứng minh rằng tổng lập phương của 3 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 9.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB > AC$, M là một điểm tùy ý trên BC. Qua M kẻ Mx vuông góc với BC và cắt đoạn AB tại I, cắt tia CA tại D.

a) Chứng minh $BI \cdot BA = BM \cdot BC$.

b) Đường thẳng CI cắt BD tại K. Chứng minh rằng $BI \cdot BA + CI \cdot CK$ không phụ thuộc vị trí M.

c) Cho $\widehat{ACB} = 60^\circ$ và diện tích tam giác CDB bằng 60 cm^2 . Tính diện tích tam giác CMA.

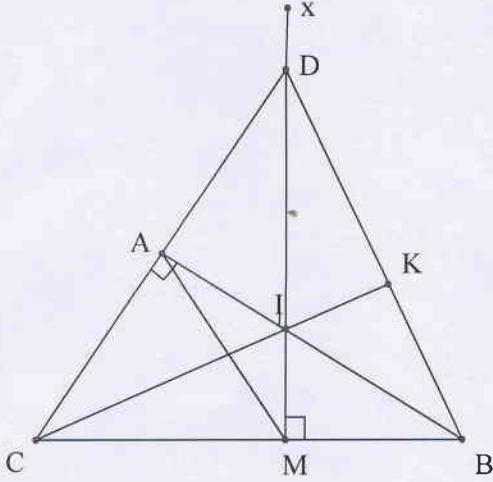
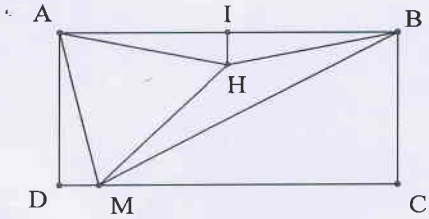
Câu 5. (3,0 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2AD$. Trên cạnh DC, lấy điểm M sao cho $\widehat{MAD} = 15^\circ$. Chứng minh tam giác ABM là tam giác cân.

===== HẾT =====

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN 9

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4,0đ)	$\text{a) } A = 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} = 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} = 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}$	0,5đ
	$= 2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$	0,5đ
	$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1) = \sqrt{6}+\sqrt{2}$	0,5đ
	<p>b) Từ giả thiết: $x + y = \sqrt{7}$, $xy = 1$</p>	
	<p>Suy ra: $\frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} = \frac{x^5 + y^5}{(xy)^5} = \frac{x^5 + y^5}{1} = x^5 + y^5$</p>	0,5đ
	<p>Mà $x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y)$</p> <p>Trong đó $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 1 = 5$</p> $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (\sqrt{7})^3 - 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$	0,5đ
<p>Vậy $S = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} = \frac{x^5 + y^5}{(xy)^5} = \frac{x^5 + y^5}{1} = x^5 + y^5$</p> $= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = 5 \cdot 4\sqrt{7} - 1 \cdot \sqrt{7} = 20\sqrt{7} - \sqrt{7} = 19\sqrt{7}$	0,5đ	
2 (5,0đ)	<p>a) Rút gọn $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right) = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1}$</p> $= \frac{x^2}{x-1} = (x+1) + \frac{1}{x-1}$	0,5đ
	<p>Nêu được A xác định khi $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$</p>	0,5đ
	<p>Lí luận: để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(x-1) \in U(1) \Rightarrow (x-1) \in \{1; -1\}$</p> <p>+ Nếu $x-1 = 1 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn)</p> <p>+ Nếu $x-1 = -1 \Rightarrow x = 0$ (loại)</p> <p>Vậy $A \in \mathbb{Z}$ khi $x = 2$</p>	0,5đ
	<p>b) Ta có $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1 > 0$. Phương trình xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.</p>	0,5đ
	$\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} + \frac{x^2+x-4}{x^4+x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1) - (x-1)(x^2+x+1)}{x^4+x^2+1} + \frac{x^2+x-4}{x^4+x^2+1} = 0$	0,5đ
	$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 1 - x^3 + 1 + x^2 + x - 4}{x^4 + x^2 + 1} = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$	0,5đ
<p>Suy ra $x = -2$ hoặc $x = 1$.</p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 1\}$</p>	0,5đ	

<p>3 (3,0đ)</p>	<p>Gọi 3 số nguyên liên tiếp lần lượt là: $n - 1, n, n + 1$ Ta có: $A = (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ $= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2) = 3n(n^2 - 1 + 3)$ $= 3n(n^2 - 1) + 9n = 3(n - 1)n(n + 1) + 9n$ Vì $(n - 1)n(n + 1) : 3$ (tích của 3 số nguyên liên tiếp) $\Rightarrow 3(n - 1)n(n + 1) : 9$ Và $9n : 9$ $\Rightarrow A : 9$ (đpcm)</p>	<p>0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ</p>
<p>4 (5,0đ)</p>	 <p>Hình vẽ</p> <p>a) CM được $\Delta MIB \sim \Delta ACB$ $\Rightarrow \frac{BI}{BC} = \frac{BM}{BA} \Leftrightarrow BI \cdot BA = BM \cdot BC$</p> <p>b) Lí luận được $CI \perp DB$ tại K CM được $\Delta CIM \sim \Delta CBK$ $\Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{CM}{CK} \Leftrightarrow CI \cdot CK = CM \cdot CB$ Mà $BI \cdot BA = BM \cdot BC$ Nên $BI \cdot BA + CI \cdot CK = BC^2$ không đổi</p> <p>c) Trong ΔCAB vuông tại A có $\widehat{ACB} = 60^\circ$ nên là nửa tam giác đều cạnh BC $\Rightarrow CA = \frac{1}{2}CB \Leftrightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{1}{2}$</p> <p>Tương tự suy ra được $CM = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2}$.</p> <p>Suy ra $\frac{CA}{CB} = \frac{CM}{CD}$ và ta có góc MCA chung $\Rightarrow \Delta CMA \sim \Delta CDB$</p> <p>$\Rightarrow \frac{S_{CMA}}{S_{CDB}} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{CMA} = 15(\text{cm}^2)$</p> <p>(Sử dụng tính chất: Tỉ số hai diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng).</p>	<p>0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ</p>
<p>5 (3,0đ)</p>	 <p>Hình vẽ</p> <p>Gọi I là trung điểm của AB. Trên đường thẳng vuông góc với AB tại I lấy điểm H sao cho $\widehat{HAB} = 15^\circ$ (H nằm trong hình chữ nhật ABCD). Khi đó $\Delta AIH = \Delta ADM$ (g,c,g) $\Rightarrow AH = AM$</p> <p>Và ta có $\widehat{MAH} = 90^\circ - \widehat{MAD} - \widehat{MAI} = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ$</p> <p>Suy ra tam giác MAH là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{AHM} = 60^\circ$ và $HA = HM$.</p> <p>Lí luận được tam giác HAB cân có $\widehat{HBA} = \widehat{HAB} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{AHB} = 150^\circ$.</p>	<p>0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ</p>

Suy ra $\widehat{MHB} = 360^{\circ} - 60^{\circ} - 150^{\circ} = 150^{\circ}$.

Do đó $\triangle AHB = \triangle MHB$ (c, g, c) $\Rightarrow AB = MB \Rightarrow$ tam giác ABM cân tại B.

0,5đ

Lưu ý: Học sinh có thể giải theo cách khác mà đúng thì vẫn cho theo thang điểm trên

.....**HẾT**.....